

CHAPTER

2

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.
John T. DeWolf
David F. Mazurek

Lecture Notes:
J. Walt Oler
Texas Tech University



Stress and Strain – Axial Loading

응력과 변형률 - 축
하중

Contents (목차)

- 응력과 변형률, 축하중([Stress & Strain: Axial Loading](#))
- 수직응력([Normal Strain](#))
- 응력-변형률시험([Stress-Strain Test](#))
- 응력-변형률선도, 연성재료([Stress-Strain Diagram: Ductile Materials](#))
- 응력변형률선도, 취성재료([Stress-Strain Diagram: Brittle Materials](#))
- 훅법칙, 탄성계수([Hooke's Law: Modulus of Elasticity](#))
- 탄성 및 소성거동([Elastic vs. Plastic Behavior](#))
- 피로([Fatigue](#))
- 축하중에 의한 변형([Deformations Under Axial Loading](#))
- 예제2.10([Example 2.01](#))
- 견본문제2.1([Sample Problem 2.1](#))
- 부정정([Static Indeterminacy](#))
- 예제2.04([Example 2.04](#))
- 열응력([Thermal Stresses](#))
- 푸와송비([Poisson's Ratio](#))

- 일반화된 훅법칙([Generalized Hooke's Law](#))
- 체적탄성계수([Dilatation: Bulk Modulus](#))
- 전단변형률([Shearing Strain](#))
- 예제2.10([Example 2.10](#))
- E , ν , G 의 관계([Relation Among \$E\$, \$\nu\$, and \$G\$](#))
- 견본문제 2.5([Sample Problem 2.5](#))
- 복합재료([Composite Materials](#))
- 생브낭의 원리([Saint-Venant's Principle](#))
- 응력집중: 구멍([Stress Concentration: Hole](#))
- 응력집중: 필릿([Stress Concentration: Fillet](#))
- 예제2.12([Example 2.12](#))
- 탄소성재료([Elastoplastic Materials Plastic Deformations](#))
- 잔류응력([Residual Stresses](#))
- 예제2.14, 2.15, 2.16([Example 2.14, 2.15, 2.16](#))

Stress & Strain: Axial Loading (응력 및 변형률: 축하중)

- 구조물이나 기계는 하중에 의한 응력과 더불어 구조물의 변형을 고려하여 설계
- 변형이 일어나는 구조물은 부정정(statically indeterminate) - 반력과 부재의 힘을 고려
- 부재내의 응력분포 계산시 부재의 변형을 고려해야 함
- 2장 전반부: 축 하중을 받는 구조물 부재의 변형
- 2장 후반부: 비틀림 및 순수 굽힘 하중

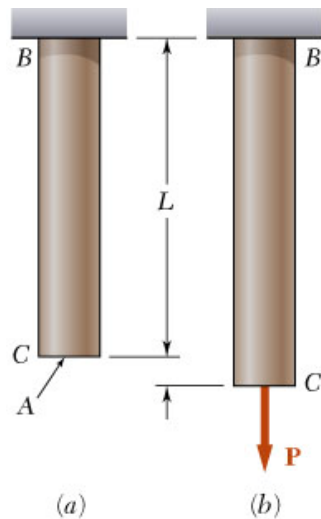


Fig. 2.1

$$\sigma = \frac{P}{A} = \text{stress}$$

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \text{normal strain}$$

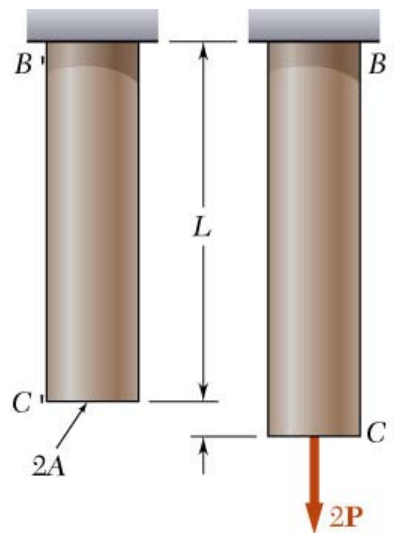


Fig. 2.3

$$\sigma = \frac{2P}{2A} = \frac{P}{A}$$

$$\epsilon = \frac{\delta}{L}$$

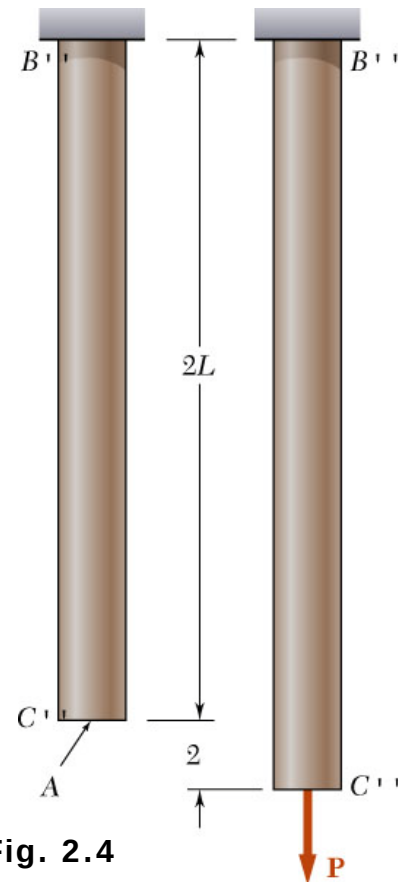


Fig. 2.4

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

$$\epsilon = \frac{2\delta}{2L} = \frac{\delta}{L}$$

응력-변형률 시험 (Stress-Strain Test)

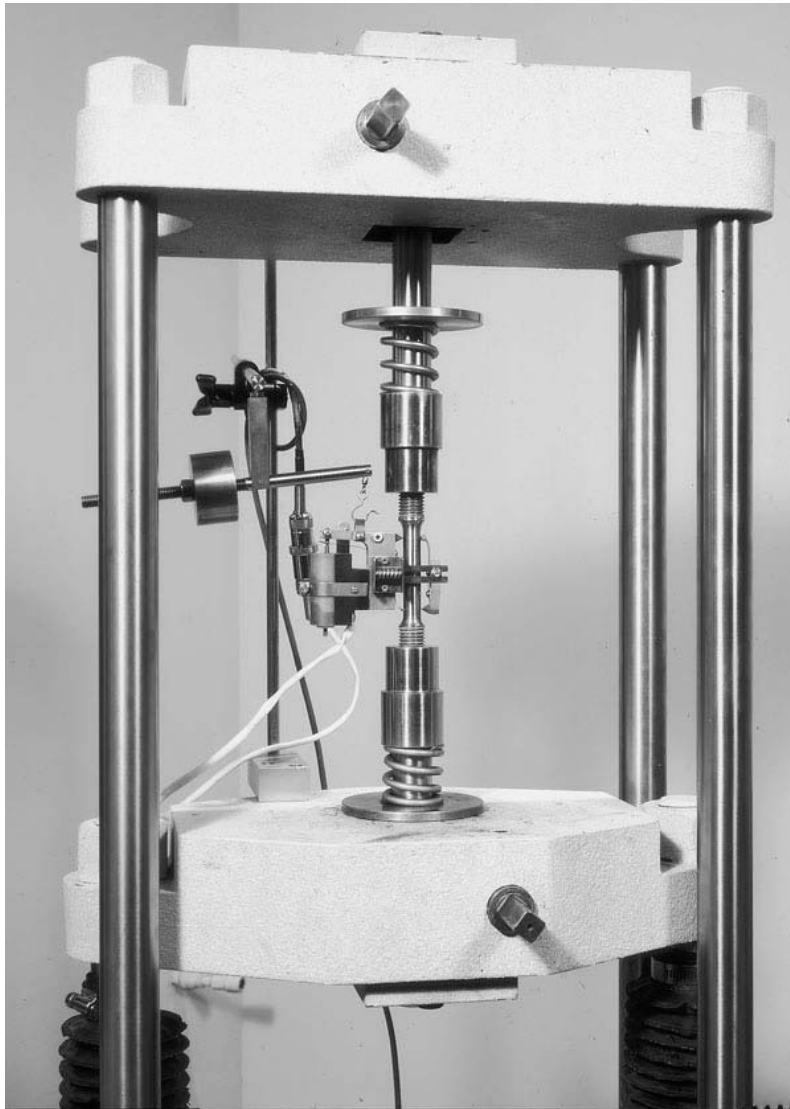


Fig 2.7 인장시험기

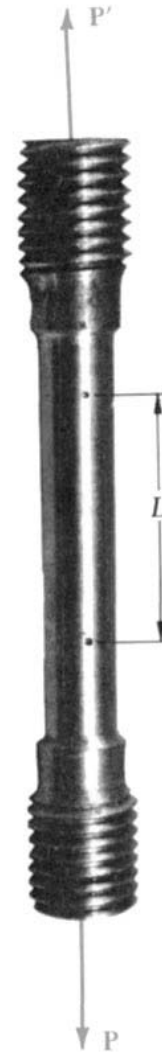
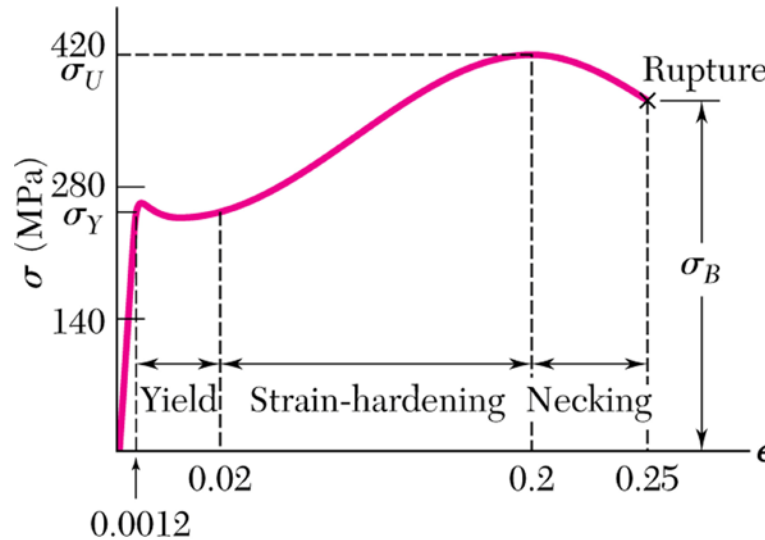
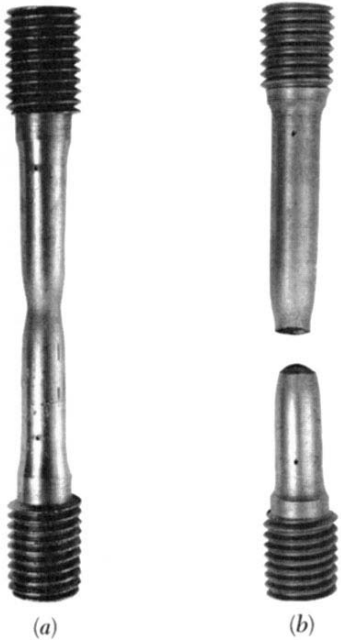
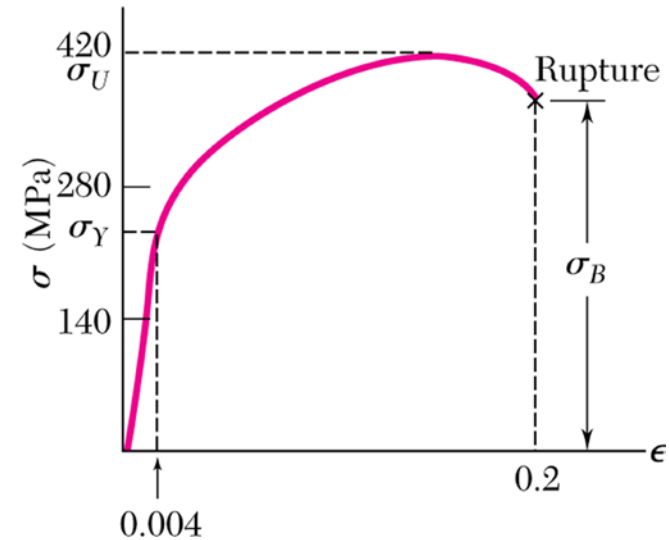


Fig 2.8 인장시편 (Test specimen with tensile load)

응력-변형률 선도: 연성재료(Stress-Strain Diagram: Ductile Materials)



(a) Low-carbon steel



(b) Aluminum alloy

응력-변형률 선도: 취성재료(Stress-Strain Diagram: Brittle Materials)

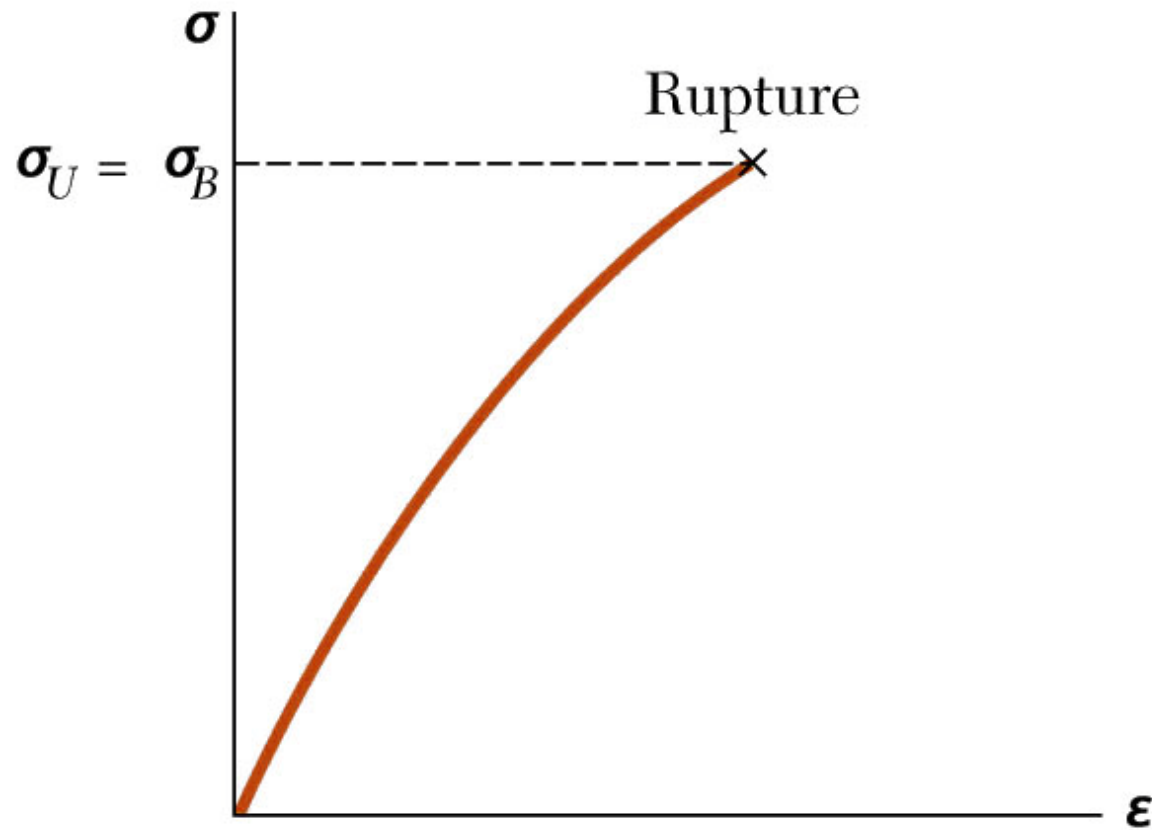
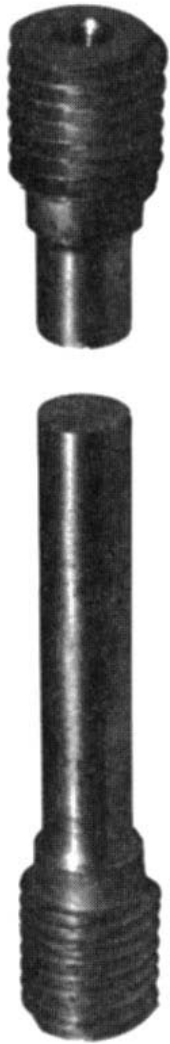


Fig 2.1 Stress-strain diagram for a typical brittle material.

탄성 및 소성거동(Elastic vs. Plastic Behavior)

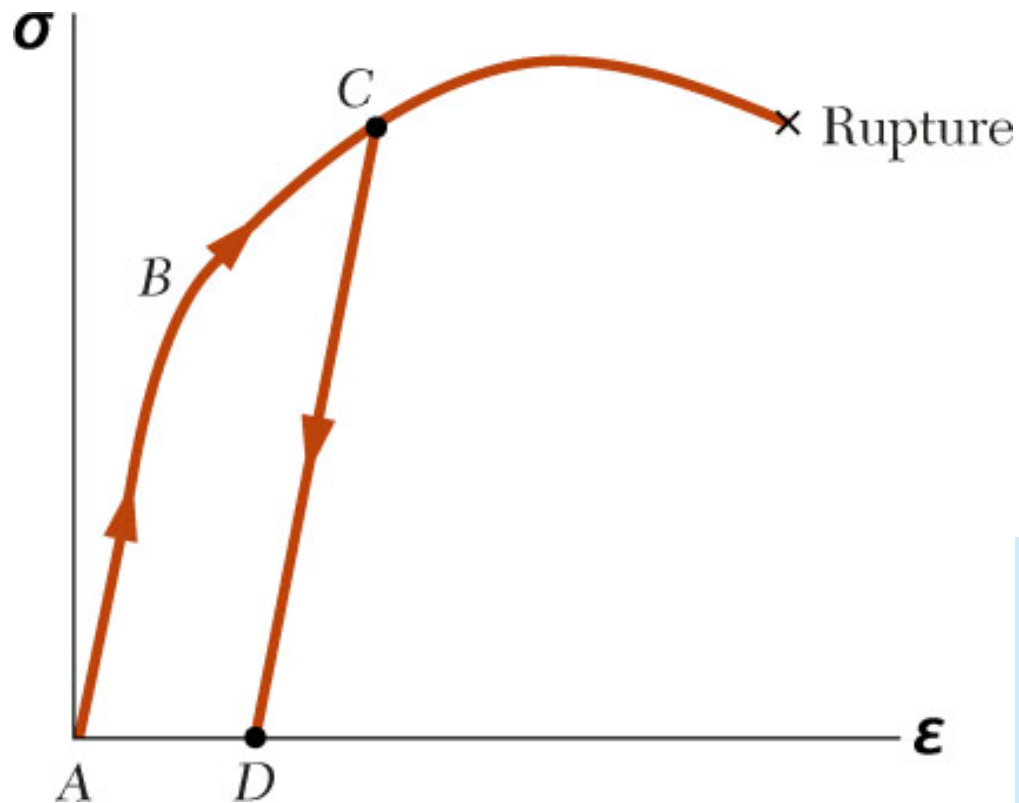


Fig. 2.18

- 응력 제거시 변형률이 없어지는 경우, 재료는 탄성적으로 거동 (behave *elastically*)
- 재료가 탄성적으로 거동하는 응력의 최대값: 탄성한계 (*elastic limit*).
- 응력이 제거된 후 변형률이 영(zero)으로 돌아가지 않을 경우, 재료는 소성거동 (behave *plastically*)

피로 (Fatigue)

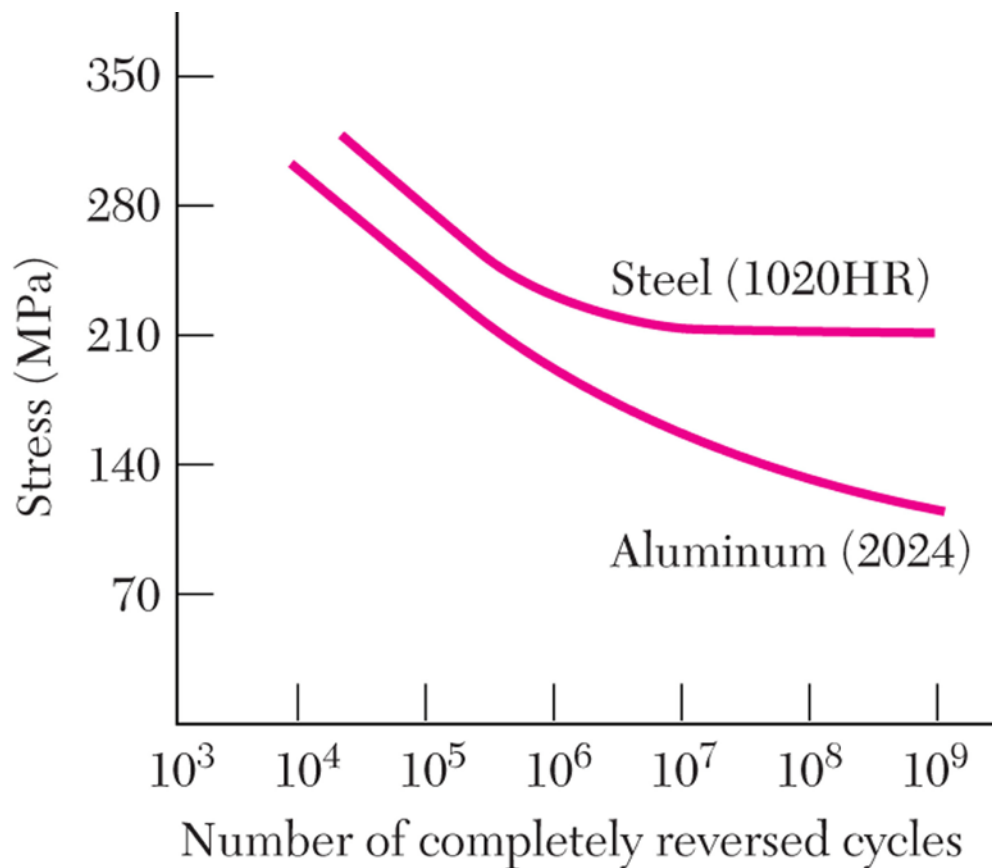


Fig. 2.21

- 피로특성 : S-N 선도(S-N diagrams)로 나타냄..
- 많은 하중 사이클을 받을 경우 부재는 극한 강도(ultimate strength)보다 훨씬 낮은 응력레벨에 피로(fatigue)에 의해 파손
- 내구한도(endurance limit)보다 낮은 응력 레벨에서는 무한대 하중사이클에서도 파손이 일어나지 않음.

탄성적·탄성계수(Hooke's Law·Modulus of Elasticity)

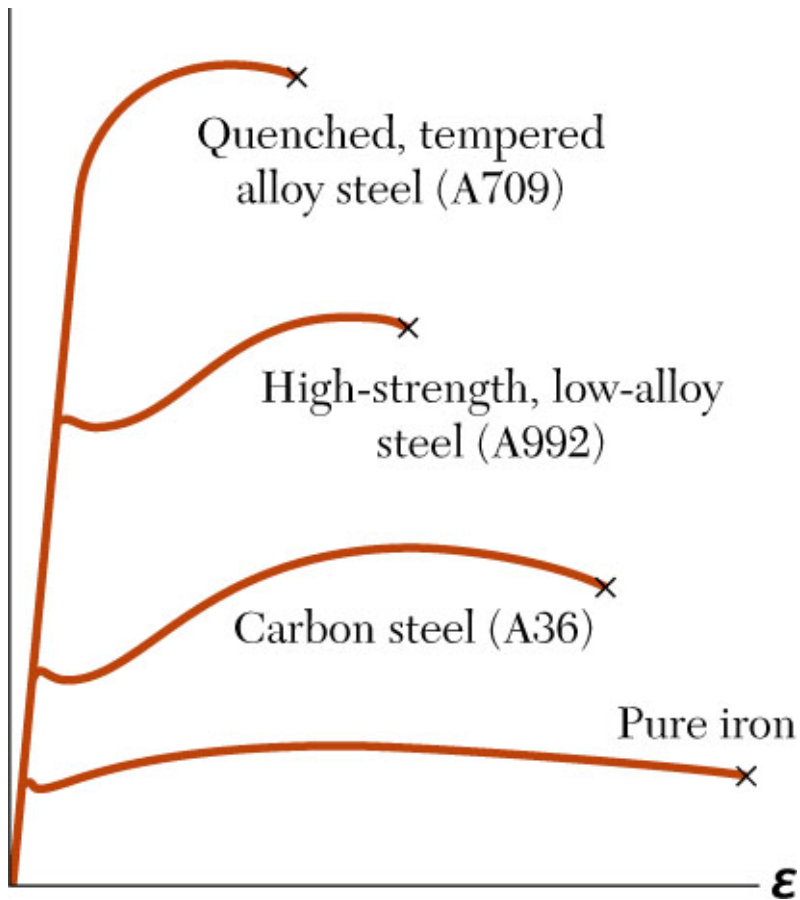


Fig 2.16 Stress-strain diagrams for iron and different grades of steel.

- 항복응력 이하(below the yield stress)

$$\sigma = E \epsilon$$

E = Youngs Modulus or
Modulus of Elasticity

- 강도는 합금의 종류, 열처리, 제조공정에 따라 달리 변화하나 강성 또는 탄성계수는 그렇지 않음 (Strength is affected by alloying, heat treating, and manufacturing process but stiffness (Modulus of Elasticity) is not.)

Deformations Under Axial Loading

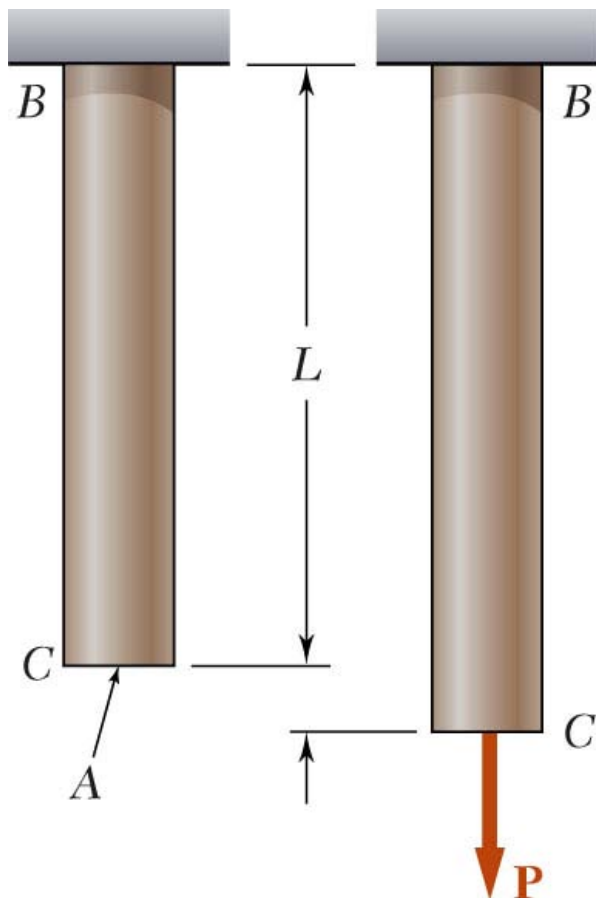


Fig. 2.22

- 훅 법칙으로부터

$$\sigma = E\varepsilon \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE}$$

- 변형률의 정의로부터

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

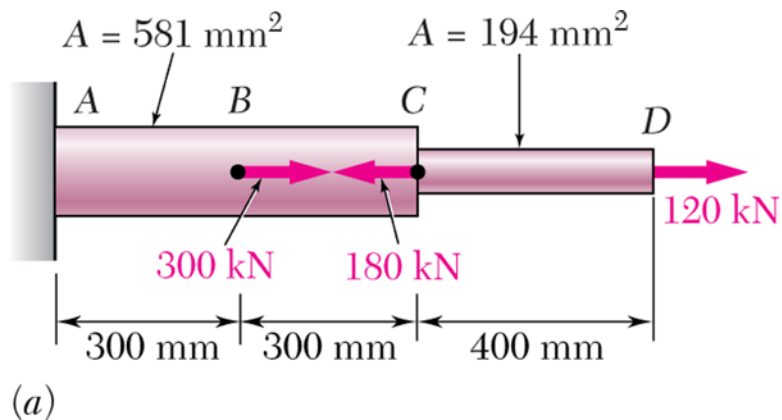
- 위의 관계식으로부터 변형(deformation)에 대해 풀면,

$$\delta = \frac{PL}{AE}$$

- 하중, 단면적 또는 재료의 성질이 다를 경우

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i}$$

예제(Example 2.01)



$$E = 200 \text{ GPa}$$

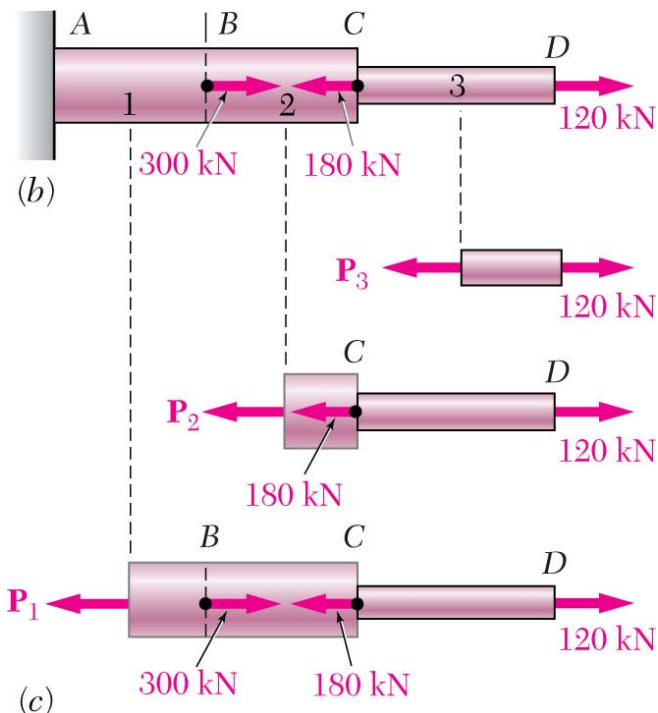
주어진 하중에서 강봉의 변형량을 계산하라.

풀이:

- 봉을 하중 작용점을 기준으로 나눈다.
- 내력을 결정하기 위해 각 부분의 자유물체도를 작성
- 전체 변형량 계산

풀이:

- 봉을 3 부분으로 나눈다



- 각 부분의 자유물체도로부터 내력을 결정

$$P_1 = 240 \times 10^3 \text{ N}$$

$$P_2 = -60 \times 10^3 \text{ N}$$

$$P_3 = 120 \times 10^3 \text{ N}$$

- 전체 변형량 계산

$$\begin{aligned} \delta &= \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{1}{E} \left(\frac{P_1 L_1}{A_1} + \frac{P_2 L_2}{A_2} + \frac{P_3 L_3}{A_3} \right) \\ &= \frac{1}{200 \times 10^9} \left[\frac{(240 \times 10^3) 0.3}{581 \times 10^{-6}} + \frac{(-60 \times 10^3) 0.3}{581 \times 10^{-6}} + \frac{(120 \times 10^3) 0.4}{194 \times 10^{-6}} \right] \\ &= 1.73 \times 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}$$

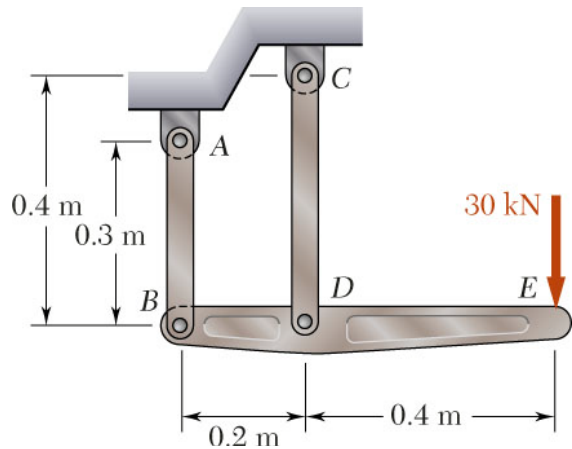
$$\delta = 1.73 \text{ mm}$$

$$L_1 = L_2 = 0.3 \text{ m}$$

$$L_3 = 0.4 \text{ m}$$

$$A_1 = A_2 = 581 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \quad A_3 = 194 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

견본문제 (Sample Problem 2.1)



풀이:

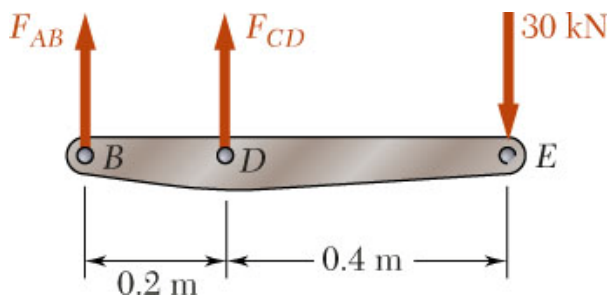
- BDE의 자유물체도로부터 링크 AB 와 DC에 의한 힘을 계산
- 링크 AB 와 DC의 변형량 (deformation) 또는 B 와 D 에서 변위(displacement)를 계산
- B와 D의 변위로부터 E에서 변위를 기하학적으로 계산

- 강체봉 BDE 는 두개의 링크 AB 와 CD에 의해 지지.
- 링크 AB: 알루미늄 ($E = 70 \text{ GPa}$), 단면적 (500 mm^2)
- 링크 CD: 강재 ($E = 200 \text{ GPa}$), 단면적 (600 mm^2).
- 30-kN 하중 작용시 (a) B, (b) D, (c) E지점에서 변형량 계산

견본문제 (Sample Problem 2.1)

풀이:

자유물체도: 봉 BDE



$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0$$

$$0 = -(30 \text{ kN} \times 0.6 \text{ m}) + F_{CD} \times 0.2 \text{ m}$$

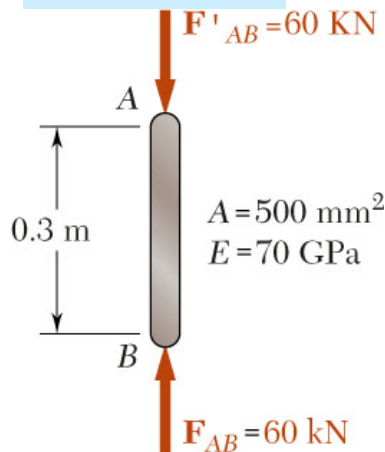
$$F_{CD} = +90 \text{ kN} \text{ tension}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_D = 0$$

$$0 = -(30 \text{ kN} \times 0.4 \text{ m}) - F_{AB} \times 0.2 \text{ m}$$

$$F_{AB} = -60 \text{ kN} \text{ compression}$$

B의 변위:



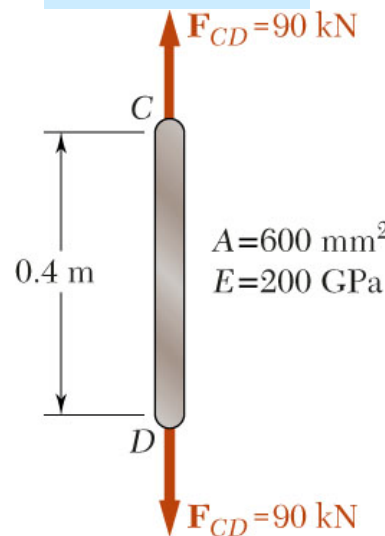
$$\delta_B = \frac{PL}{AE}$$

$$= \frac{(-60 \times 10^3 \text{ N})(0.3 \text{ m})}{(500 \times 10^{-6} \text{ m}^2)(70 \times 10^9 \text{ Pa})}$$

$$= -514 \times 10^{-6} \text{ m}$$

$$\delta_B = 0.514 \text{ mm} \uparrow$$

D의 변위:



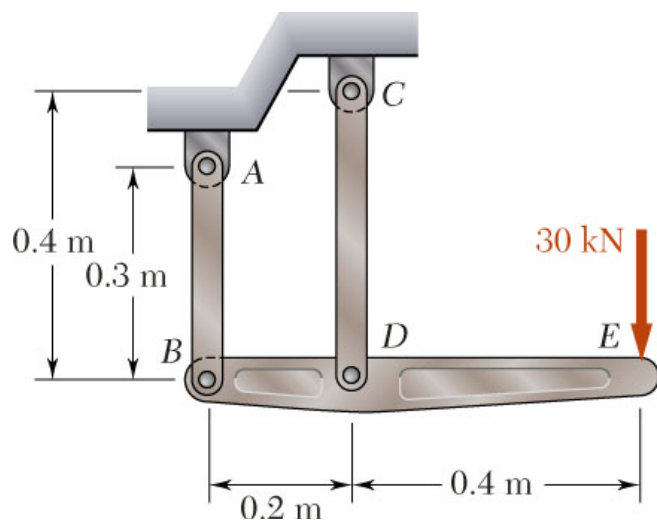
$$\delta_D = \frac{PL}{AE}$$

$$= \frac{(90 \times 10^3 \text{ N})(0.4 \text{ m})}{(600 \times 10^{-6} \text{ m}^2)(200 \times 10^9 \text{ Pa})}$$

$$= 300 \times 10^{-6} \text{ m}$$

$$\delta_D = 0.300 \text{ mm} \downarrow$$

견본문제(Sample Problem 2.1)



D의 변위:

$$\frac{BB'}{DD'} = \frac{BH}{HD}$$

$$\frac{0.514 \text{ mm}}{0.300 \text{ mm}} = \frac{(200 \text{ mm}) - x}{x}$$

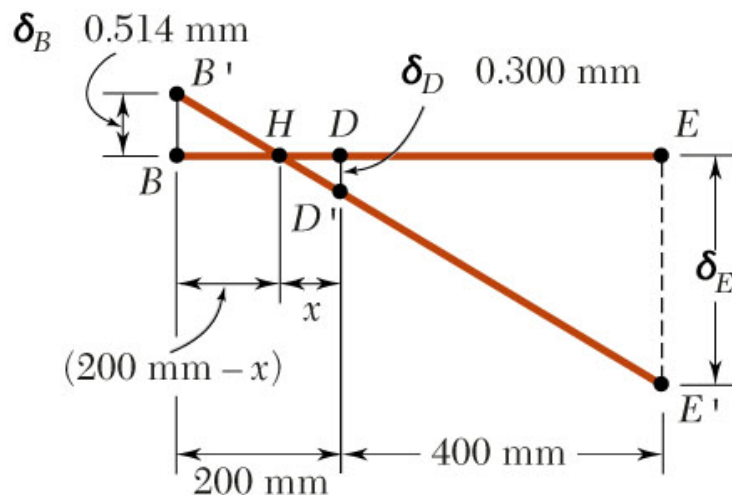
$$x = 73.7 \text{ mm}$$

$$\frac{EE'}{DD'} = \frac{HE}{HD}$$

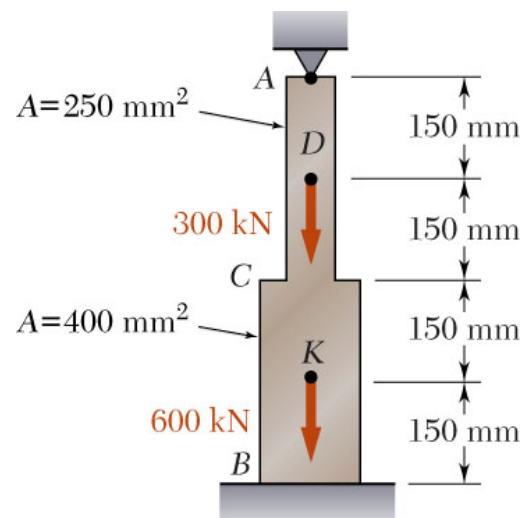
$$\frac{\delta_E}{0.300 \text{ mm}} = \frac{(400 + 73.7) \text{ mm}}{73.7 \text{ mm}}$$

$$\delta_E = 1.928 \text{ mm}$$

$$\delta_E = 1.928 \text{ mm} \downarrow$$

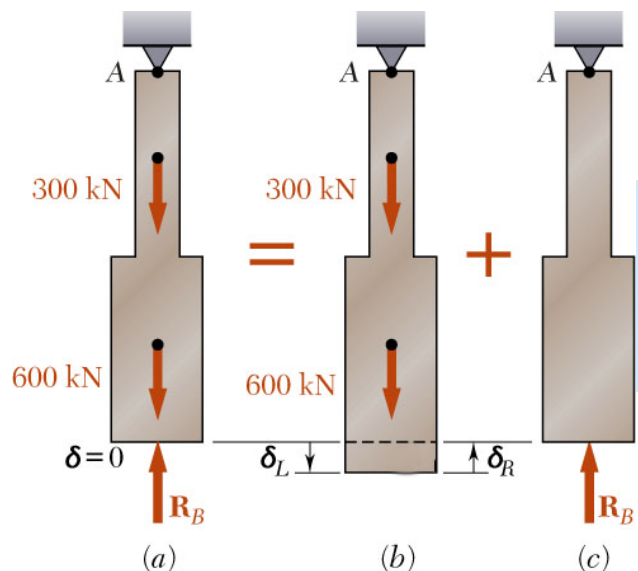


부정정 문제 (Static Indeterminacy)



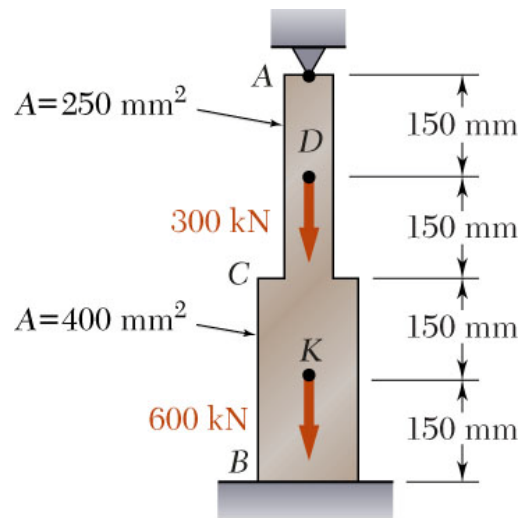
- 정역학적 관계식으로 내력과 반력을 결정할 수 없는 구조물 – 부정정 (*statically indeterminate*)

- 평형을 유지하기 위해 필요로 하는 지지보다 더 많은 구조물 – 부정정



- 잉여반력 (redundant reaction) 을 상응하는 변형을 발생시킬 수 있는 미지하중 (unknown load) 으로 대체
- 잉여반력과 실제 하중에 의한 변형 (deformation) 을 별도로 구한 후, 서로 더하거나 중첩 (superpose)

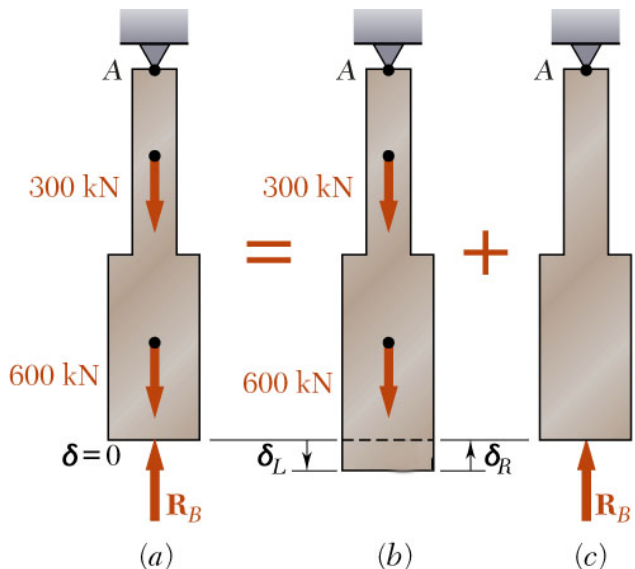
$$\delta = \delta_L + \delta_R = 0$$



하중을 가하기 전 꼭 맞게 고정된 강재봉이 하중을 받는 상태에서 A와 B에 발생하는 반력을 결정

풀이:

- B에서 반력을 잉여로 간주, 봉을 지지로부터 해제. 가해진 하중에 의한 B지점의 변위를 계산
- B지점에서 잉여반력으로 인한 변위를 계산
- 하중에 의한 변위와 잉여반력으로 인한 변위는 서로 같아야 하며, 합은 영(zero)이 되어야 함.
- B지점의 반력과 작용된 하중에 의해 A지점에서 반력을 계산



예제 2.04 (Example 2.04)

풀이:

- 잉여반력이 없다고 가정하고 작용된 하중에 의한 B지점의 변위를 계산

$$P_1 = 0 \quad P_2 = P_3 = 600 \times 10^3 \text{ N} \quad P_4 = 900 \times 10^3 \text{ N}$$

$$A_1 = A_2 = 400 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \quad A_3 = A_4 = 250 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 0.150 \text{ m}$$

$$\delta_L = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{1.125 \times 10^9}{E}$$

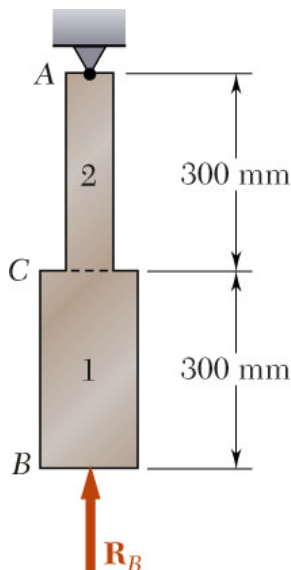
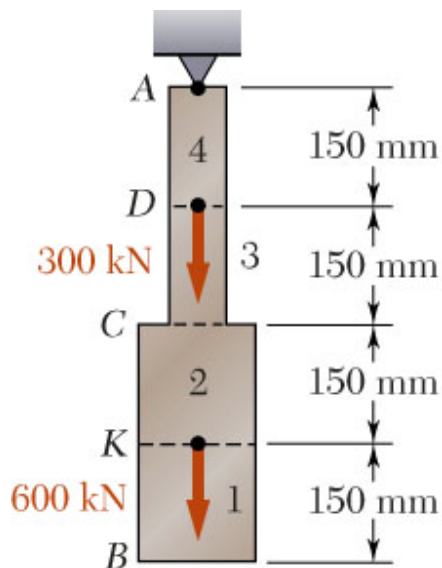
- 잉여반력으로 인한 B지점의 변위

$$P_1 = P_2 = -R_B$$

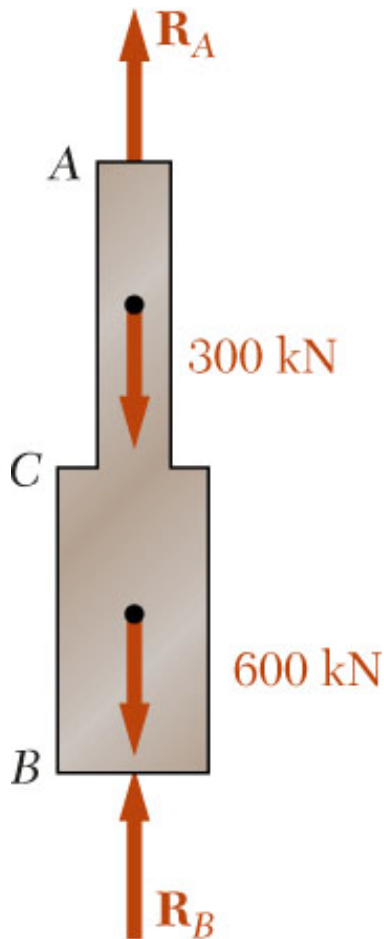
$$A_1 = 400 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \quad A_2 = 250 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$L_1 = L_2 = 0.300 \text{ m}$$

$$\delta_R = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = - \frac{(1.95 \times 10^3) R_B}{E}$$



Example 2.04



- 하중과 잉여반력에 의한 변위는 서로 같아야 하며 이들을 서로 더하여 영이 되도록 한다.

$$\delta = \delta_L + \delta_R = 0$$

$$\delta = \frac{1.125 \times 10^9}{E} - \frac{(1.95 \times 10^3) R_B}{E} = 0$$

$$R_B = 577 \times 10^3 \text{ N} = 577 \text{ kN}$$

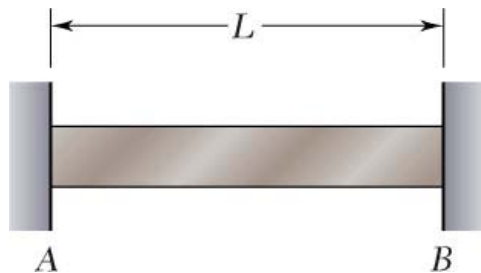
- B지점의 반력과 하중에 의해 A지점의 반력 계산

$$+\uparrow \sum F_y = 0 = R_A - 300 \text{ kN} - 600 \text{ kN} + 577 \text{ kN}$$

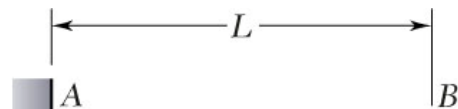
$$R_A = 323 \text{ kN}$$

$$R_A = 323 \text{ kN}$$

$$R_B = 577 \text{ kN}$$



- 온도가 변화되면 길이가 달라지거나 열변형률(*thermal strain*) 이 발생. 팽창(*elongation*)이 구속되지 않을 경우 열변형률은 발생하나 응력은 영(*zero*)



- 부가적인 지지(*additional support*)를 잉여로 고려, 중첩법 적용



$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L$$

$$\delta_P = \frac{PL}{AE}$$

α = thermal expansion coef.



- 열변형과 잉여지지(*redundant support*)에 의한 변형은 서로 같아야 하며 중첩시키면 영이 되어야 함.



$$\delta = \delta_T + \delta_P = 0$$

$$\alpha(\Delta T)L + \frac{PL}{AE} = 0$$

$$P = -AE\alpha(\Delta T)$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = -E\alpha(\Delta T)$$